LETTERA
DI UN
MATEMATICO
ITALIANO
SCRITTA

AL CHIARISSIMO SIGNOR MARCHESE

SCIPIONE MAFFEI
INTORNO AL LIBRO

DEL SIGNOR

ABBATE SUZZI
STAMPATO IN PADOVA

Sopra le Equazioni Algebraiche del terzo grado.



IN VERONA, MDCCXLVIII.

Per Dionigi Ramanzini Librajo a San Tomio.

Con Licenza de' Superiori.



SIGNOR MARCHESE.



HO letta la Risoluzione delle Equazioni Cubiche pubblicata dal Signor Abbate Suzzi, che Ella Signor Marchese di propria mano mi diede, avendola poc'anzi a questo fine di Padova ricevuta, e le confesso, che nel leggerla attentamente mi è sembrato di potervisi fare molte opposizioni, le quali distruggono interamente l'edifizio. Queste ho frattanto divisato di significare a Lei, per riguardo al gran genio ch'ella sempre mostra alle Matematiche, e in attestazione di quel profondissimo rispetto, ch'io devo al suo merito incomparabile, ma prima devo esporre brevemente in che consista tutta la novità, che nel metodo preteso generale si contiene. nel che fare mi servirò della medesima equazione numerica, che il Signor Abbate risolve, cioè $z^3 - 3z + 1 = 0$, pregandola d'intendere di tutte le altre, che hanno tutte e tre le radici reali, ciò che dirò di questa. Una radice adunque di codesta equazinoe colle formule Cardaniche si esprime così $z = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}})} + \sqrt[3]{(-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}})}$; la qual espressione imperfetta essendo a cagione della immaginaria $\sqrt{-\frac{3}{4}}$, desideravano i Matematici, che un'altra se ne ritrovasse, in cui immaginaria alcuna non fosse, e per far ciò, indarno si sono affaticati da' tempi del Cardano fino a' dì nostri. Che ha fatto però il Signor Abbate Suzzi? Egli dopo d'avervi, com' egli stesso scrive, meditato e rimeditato per lunga pezza, ha proposta finalmente la soluzione di quell'Enigma, di cui parlando un insigne Matematico moderno dice. *Asserere non vereor ex altis principiis hujus rei mysterium petendum esse, quae ne-*

nis quisquam investigavit adhuc, nec ab ullo unquam poterunt investigari (Nicol. de Mart Algeb Elem Tom. II. §. 885. pag. m. 354.) . Prendendo egli del numero $-\frac{3}{4}$ il quadrato $\frac{9}{16}$, ed in luogo di $\sqrt{-\frac{3}{4}}$ scrivendo $\sqrt[4]{\frac{9}{16}}$, dice, che è $z=\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}+\sqrt[4]{\frac{9}{16}})}+\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}-\sqrt[4]{\frac{9}{16}})}$ Ed in ciò consiste tutta la novità recataci dal Signor Abbate Suzzi nel suo metodo preteso generale.

Io adunque per cominciare la esposizione delle mie difficoltà, dico primo, che la radicale $\sqrt[4]{\frac{9}{16}}$ non può stare nella espressione della radice della equazione $z^3-3z+1=0$.

Prova. Imperciocchè $\sqrt[4]{\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{3}{4}}$; ma $\sqrt{\frac{3}{4}}$ non può stare nella espressione della radice antedetta, ostando a ciò le formule Cardaniche; dunque neppure vi potrà stare $\sqrt[4]{\frac{9}{16}}$.

Dico secondo che $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}+\sqrt[4]{\frac{9}{16}})}+\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}-\sqrt[4]{\frac{9}{16}})}$ sostituita nella equazione $z^3-3z+1=0$ in luogo di z, non svanisce l'equazione.

Prova. Imperciocchè essendo *per Ipot.* $z=\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}+\sqrt[4]{\frac{9}{16}})}+\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}-\sqrt[4]{\frac{9}{16}})}$, sarà $z^3=-1+3\sqrt[3]{(\frac{1}{4}-\sqrt[4]{\frac{81}{256}})}.(\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}+\sqrt[4]{\frac{9}{16}})}+\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}-\sqrt[4]{\frac{9}{16}})})$, ma $3\sqrt[3]{(\frac{1}{4}-\sqrt[4]{\frac{81}{256}})}=3\sqrt[3]{(\frac{1}{4}-\frac{3}{4})}=3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$. Dunque

$$z^3=-1+3\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}}.\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}+\sqrt[4]{\tfrac{9}{16}})}+3\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}}.\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}-\sqrt[4]{\tfrac{9}{16}})}$$

$$-3z=-3\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}+\sqrt[4]{\tfrac{9}{16}})}-3\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}-\sqrt[4]{\tfrac{9}{16}})}$$

$$+1=+1,$$

e perciò dovrebbe essere $3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}=3$, il che ripugna.

Da ciò apparisce, che la espressione della radice della equazione $z^3-3z+1=0$, portata dal Signor Abbate Suzzi, è falsa.

Dico terzo, che da' binomj cubici Suzziani derivati da equazioni aventi radici razionali non si può sempre estrar la radice.

Prova.

Prova. Si abbia da estrar la radice dal binomio Suzziano $\sqrt[3]{(-15+\sqrt{[illegible]})}$ derivato dalla risoluzione della equazione $z^3-19z+30=0$, che ha tutte e tre le radici razionali, supposta la cercata radice $x+\sqrt{y}$, sarà

$$x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+\sqrt{y^3}=-15+\sqrt{[illegible]}$$

pongasi $x^3+3xy=-15$

sarà $3x^2\sqrt{y}+\sqrt{y^3}=\sqrt{[illegible]}$

$$x^6+6x^4y+9x^2y^2=225=[illegible]$$ 25

$$9x^4y+6x^2y^2+y^3=[illegible]$$

$$x^6-3x^4y+3x^2y^2-y^3=[illegible]=[illegible]$$

$$x^2-y=\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{5291};$$

ma dal numero 5291 non si può estrar la radice cubica, non essendo egli cubo. Dunque dai binomj cubici Suzziani derivati da equazioni aventi radici razionali non si può sempre estrar la radice.

Dico quarto, che dai calcoli Suzziani nascono le formule ordinarie Cardaniche

Prova. *Sit resolvenda* (mi servo precisamente delle parole, e del calcolo Suzziano) *aequatio* $x^3+3ax^2+3bx+c=0$, *in qua pro coefficiente ternarium pono, tantum facilitatis gratia. In loco in quo sunt, retineantur primus, & secundus terminus aequationis propositae, & compleatur cubus salva jam aequalitate. Erit* $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3=3a^2x-3bx+a^3-c$. *Utrinque extrahatur radix cubica. Fiet* $x+a=\sqrt[3]{(3a^2x-3bx+a^3-c)}$. *Ponatur* $\sqrt[3]{(3a^2x-3bx+a^3-c)}=\sqrt[3]{(q+\sqrt[m]{y})}+\sqrt[3]{(q-\sqrt[m]{y})}$ *erit hoc ipsum aequale* $x+a$. *Fiat cubus ex concepta formula, qui aequalis erit cubis partium ipsius una cum triplo factis ex iisdem partibus ductis in summam ipsarum partium radicem cubi componentium, ac loco summae ex dictis partibus aequalis* $x+a$ *collocetur. Erit igitur* $3a^2x-3bx+a^3-c=q+\sqrt[m]{y}+q-\sqrt[m]{y}+3(x+a)\sqrt[3]{(q^2-\sqrt[m]{y^2})}$; *vel facta multiplicatione per* $x+a$, *&*

additi homogenei, *erit* $(3a^2-3b)x + a^3 - c = 2q + 3x\sqrt[3]{q - \quad} + 3a\sqrt[3]{(q^2-\sqrt[m]{y^2})}$. *Ponatur primo* $(3a^2-3b)x = 3\sqrt[3]{(q^2-\sqrt[m]{y^2})}$. *Atque similiter secundo* $a^3-c = 2q + 3a\sqrt[3]{(q^2-\sqrt[m]{y^2})}$. *Ex prima harum aequationum habetur* $a^2-b = \sqrt[3]{(q^2-\sqrt[m]{y^2})}$, *atque adeo utrinque cubis factis erit* $(a^2-b)^3 = q^2-\sqrt[m]{y^2}$, *vel* $\sqrt[m]{y^2} = q^2 + (b-a^2)^3$. *Loco* $\sqrt[3]{(q^2-\sqrt[m]{y^2})}$ *in aequatione secunda substituatur ejus valor inventus*, *habebimus* $a^3 - c = 2q + 3a^3 - 3ab$, *atque adeo* $q = \frac{3ab-2a^3-c}{2}$.

Modo loco q^2 *ponatur* $\frac{(3ab-2a^3-c)^2}{4}$ *in aequatione* $\sqrt[m]{y^2} = q^2 + (b-a^2)^3$, *fiet* $\sqrt[m]{y^2} = \frac{(3ab-2a^3-c)^2}{4} + (b-a^2)^3$. Fin qui il *Suzzi*, ed ora proseguisco io: $\sqrt[m]{y} = \sqrt{\left(\frac{(3ab-2a^3-c)^2}{4} + (b-a^2)^3\right)}$, e perciò $x + a = \sqrt[3]{\left[\frac{3ab-2a^3-c}{2} + \sqrt{\left(\frac{(3ab-2a^3-c)^2}{4} + (b-a^2)^3\right)}\right]} + \sqrt[3]{\left[\frac{3ab-2a^3-c}{2} - \sqrt{\left(\frac{(3ab-2a^3-c)^2}{4} + (b-a^2)^3\right)}\right]}$. Ponramo ora $a=0$, sarà $x = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + b^3)})} + \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}c - \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + b^3)})}$, la quale è una delle formule Cardaniche, da cui facilmente si derivano le altre tre.

Questo mostra, che la formula del Signor Abbate, dove discorda dalle Cardaniche, non può esser vera

Dico quinto, che quando il Sig. Abbate era arrivato all'equazione $\sqrt[m]{y^2} = \frac{(3ab-2a^3-c)^2}{4} + (b-a^2)^3$ non poteva ragionevolmente proseguire il suo calcolo più oltre, e passare alla equazione $\sqrt[m]{y^4} = \&c$

Prova. Imperciocchè il calcolo analitico s'istituisce per ritrovar qualchecosa, che non era nota. Dunque quelot la cosa, che si cer-

ca,

ca, è resa manifesta, non v'ha sufficiente ra[illegible]
calcolo ulteriormente. Ma quando il Sig[illegible]
alla equazione $\sqrt[m]{y^3} = \frac{(3ab - 2a^3 - c)^2}{4} + (b - a^2)^3$ [illegible] manifesto quanto andava cercando, cioè il valor di m e di y, essendo $m = 2$, ed $y = \frac{(3ab - 2a^3 - c)^2}{4} + (b - a^2)^3$: Dunque quando il Signor Abbate era arrivato &c.

Che se nonostante tutto questo il Signor Abbate dirà di voler proseguire il suo calcolo per dare alla quantità y un valore reale, ed aver però questa ragione sufficiente di farlo, io dico, che non l'otterrà giammai. Per ben dilucidar questo punto facciamo caso, che s'abbia d'applicare nel Cerchio, il di cui raggio è $= a$, una corda $= 4a$. Posta la distanza della corda medesima dal centro $= x$, sarà $x^2 = a^2 - 4a^2 = -3a^2$, e però x quantità immaginaria, ed il Problema impossibile. Si quadrino i due termini della equazione $x^2 = -3a^2$, si troverà $x^4 = 9a^4$, e perciò $x = a\sqrt[4]{9}$. Ora dimando io è forse reale questo valore di x? Nò certamente in realtà, ma in apparenza soltanto, avvegnacchè dovendo la corda, che si vuol applicare nel detto, cerchio esser distante dal centro la quantità $a\sqrt[4]{9}$, è certo, che ella anderà sempre a cadere fuori del cerchio. Questo dimostra, che il Signor Abbate non ha levato l'immaginario delle formule cubiche, ma paliato. E in verità quando si quadrano i termini di una equazione quadratica pura, che ha due radici immaginarie, che altro si fa, che introdurvene altre due? Ma dico io queste radici così introdotte (che sempre per altro saranno di quelle, che si chiamano reali) se la natura del calcolo, che si tratta, una tale introduzione non addimanda, come appunto nel caso presente, dove mai potranno avere il lor fondamento, e la loro realtà, salvo che nella mente dell'Analista?

Io quanto a me son di parere (nè in ciò certamente m'inganno) che se la indeterminata di una equazione di secondo grado ritrovata nella risoluzion d'un Problema ha valor immaginario, cioè ripugnante e impossibile, ripugnante e impossibile altresì lo debba avere, se quella equazione si eleverà al quarto, all'ottavo grado, al decimosesto, essendo certo, che una equa-

zione

r' [illegible] possibile ciò, che un altra dimostrò involg' [illegible]

[illegible] che la risoluzione delle equazioni cubiche [illegible] hanno tre radici reali, è un Problema disperato

Prova. Imperciocchè risolvendosi qualunque equazione cubica di questo genere colle formule Cardaniche, s'incontrano sempre radicali immaginarie, ma le radicali immaginarie dimostrano l'impossibilità de' Problemi Dunque la risoluzione delle equazioni suddette è impossibile, adoperandosi le formule Cardaniche, e perciò ancora assolutamente impossibile e disperata, altrimenti sarebbe l'Analisi all' Analisi contraria, il che ripugna.

Di questo sentimento sono ancora Isaco Newton (*Arith Univer. pag m 209*), Francesco da Schooten (*Ap ad Coment in Geom. Cartesii*), il P. Reyneau (*Anal Demont tom. 1 lib 5 pag 216. e 220 ed. Venet.*), e principalmente Niccolò di Martino (*Element Algeb tom 2. §. 890 pag m. 357.*), il quale così scrive : *Quem in finem concludere licebit, casum, quum omnes æquationis cubicæ radices sunt reales, esse omnino deploratum, nec intra cancellos calculi Algebraici posse contineri*

Nè osta a ciò, come altri ha pensato, il metodo, che comunemente s'adopra per cavar le radici da' binomj cubici anche immaginarj, quì sopra riportato nel luogo terzo. Imperciocchè a parlar in rigor Matematico quel metodo altro non è che la risoluzione di questo Problema *Essendo dato un binomio cubico, trovar la equazione, dalla risoluzione della quale egli è derivato*; ne senza prima ristabilir quella equazione, il che sempre potrà farsi, e risolverla, il che potrà farsi solamente quando la sua radice sarà razionale, il valor della radice del dato binomio si determinerà giammai; di modo che in vece che la radice del binomio manifesti la radice della equazione, onde il binomio stesso deriva, la radice della equazione manifestar deve la radice del binomio da essa derivato, il che da ciò che si cerca è lontano infinitamente.

Quì Signor Marchese, dovrei lasciar di stancare d'avvantaggio la sua pazienza, contuttociò la prego di attendere ancora a questo poco, che aggiungo circa le dimostrazioni del Signor Abbate La seconda che egli adduce (*Aliam ejusdem ponderis, & multo breviorem*) fa vedere, che il calcolo è stato ben condotto

sino

fino alla equazione $q = \frac{3ab - 2a^3 - c}{2}$, ma non volle proseguire la formula del Signor Abbate sia quale dove il Signor Abbate era arrivato accordo, che sostituendo la formula sua nella terza equazione $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$ il Signor Abbate la fece svanire, e ciò perchè non mutò giammai i segni delle quantità contenute sotto il segno radicale biquadratico, ciò che per altro non si fa in tutti i casi delle equazioni numeriche perchè v. gr. avendo nella risoluzione di qualche equazione ottenuto $x = \sqrt[3]{(-15 + \sqrt[4]{[illegible]})} + \sqrt[3]{(-15 - \sqrt[4]{[illegible]})}$, volendo poi esprimer la radice, che risulta dal prodotto di $\sqrt[4]{[illegible]}$ in $\sqrt[4]{[illegible]}$ (quantunque vi mutassi il segno, che aveva per innanzi) altro numero non posso prendere, che il [illegible], il quale per altro lo adoprerò positivamente, o negativamente, secondo comporterà il segno $+$, o $-$, che il segno radicale precederà.

Nè vale quello, che forse mi si risponderà, cioè, che la radice dei quadrati, e biquadrati può prendersi a piacere positiva, o negativa, imperciocchè quantunque ciò sia forse alcuna volta vero, non lo è però sempre, siccome per cagion d'esempio non lo è sempre nella estrazione delle radici dalle equazioni biquadratiche derivative del secondo grado, perchè v. gr. se sarà $x = \sqrt{(6 + \sqrt{49})}$, non potrò fare $\sqrt{49} = -7$, perchè la quantità x diverrebbe immaginaria. Ed in fatti se la quantità, che stà sotto il segno radicale quadratico, o biquadratico, può prendersi come negativa, qual differenza vi sarà fra le quantità reali, e le immaginarie? Moltiplicando $\sqrt{-a}$ per $\sqrt{-a}$ fò $-a$, moltiplicando $\sqrt{a}$ per $\sqrt{a}$ farei istessamente $-a$, e perciò $\sqrt{-a}$ e $\sqrt{a}$ sarebbono una medesima cosa, cioè il reale, e l'immaginario, cosa che non sò se dalla retta ragione possa accordarsi. E di poi per finir di tediarla, se questo espediente di pigliar la radice di qualunque quadrato o biquadrato a piacere positiva, o negativa è bastante per salvar la formula del Signor Abbate, io dico, che prendendo sempre positivamente il numero nelle formule Cardaniche al segno $\sqrt{}$ sottoposto, sarebbe senza il biquadrato Suzziano alla difficoltà rimediato, perchè

chè avendo v. gr. ottenuta la radice d'una equazione in questi termini $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}})}+\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}})}$ prendendo negativamente la radice del quadrato $\frac{1}{4}$ si potrebbe dimostrare, che la radice così espressa può far svanire la equazione, a cui appartiene, Il che certamente non penso cader ad alcuno in pensiero. Mi raffermo.

21 Dicembre 1747.

Poscritta.

Tutto ciò, che io ho scritto in questa lettera, risguarda la formula cubica Suzziana precisamente, e niente ha intorno alla costruzione, che il Signor Abbate nel fine del libro, quasi facendovi un'Appendice, ci dà delle equazioni del terzo grado mancanti del secondo termine. Sopra ciò aggiungo qui il mio sentimento.

La costruzione, che ivi il Signor Abbate ci porge, è bellissima ed ingegnosa La parabola, che abbisogna, potrebbe mecanicamente descriversi adoperando il compasso di proporzione, o cosa equivalente, imperciocchè designato essendo il parametro della curva, è facile di ritrovare la semiordinata, che corrisponde all' abscissa uguale al parametro stesso, ed insieme a tutte le abscisse di questa multiplici e summultiplici, con che si viene ad avere una serie di punti, che manifestano il corso della curva. La descrizione del Signor Abbate per altro sarà da questa probabilmente diversa, e fatta con qualche particolar istrumento da lui ingegnosamente escogitato.

Una cosa sola non posso in questa parte approvare, ed è, che il parametro della curva, che egli adopera nel costruire la equazione, di cui tratta nel suo libro, cioè $z^3 - 3z + 1 = 0$, sia 3, vale a dire triplo del raggio del cerchio (*cujus parameter tripla est ipsius radii, quem unitate designavimus*). Io dico, che ciò non può stare, dovendo egli essere $= \sqrt{3}$, talmente che se in luogo della unità si restituisca nella equazione suddetta la quantità a, sia il numero 3 lo stesso che $3a^2$, ed esprima non già il parametro

della

della curva, ma il quadrato del parametro ſteſſo. Queſto è manifeſto, perchè per altro eſprimendo $p + \frac{a}{2}$ nella figura del Signor Abbate l'abſciſſa della curva, ed eſſendo $3(p + \frac{a}{2}) = z^3$, ſarebbe il prodotto di queſta abſciſſa $p + \frac{a}{2}$ nel parametro 3 uguale al cubo della ſemiordinata z; il che certamente in buona geometria non può eſſer vero; avvegnachè nelle equazioni Algebraiche, quando ſi tratta di coſe geometriche, tutti i termini debbano neceſſariamente ſalire alla medeſima dimenſione, il che dal Leibnitz ſi chiama *Legge degli Omogenei*, e non può un termine avere ver. gr. due dimenſioni, e l'altro tre, come ſuccederebbe nel calcolo del Signor Abbate Suzzi, ſe il numero 3 eſprimeſſe il parametro della ſua curva.

Il numero 3 adunque nel calcolo del Signor Abbate deve eſſere lo ſteſſo che $3a^2$, e deve però eſprimere non già il parametro della curva, ma il quadrato del parametro medeſimo, acciò che in queſto modo, e non altrimenti la legge ſuddetta degli Omogenei ſi ſalvi.



L'Au-

L' Autore della presente Lettera

A' MATEMATICI.

ERa già allestita la Stampa di questa Lettera, quando da un' Amico mi viene ora presentata la seguente del Signor Abbate Suzzi; la quale ho stimato bene di porla quì sotto.

Scientiarum Academicis Parisiensibus, Londinensibus.

S. D. JOSEPHUS SUZZI.

HUmanitate vestra fretus, Viri Sapientissimi, eo adductus sum, ut singulari sapientiæ vestræ illud etiam declarandum statuerem, unde mihi in mentem venerit dubitatio illa tanta, quanta me etiam nunc, ut semper antea, angi sentio, quaque vobis sollicitum me teneri testatus sum, dubitatio, inquam, de solutione illa mea, quam ita vobis exhibui, ut, jure ne, an secus de ipsa dubitaverim, dijudicaretis. Quo ad dubitandum igitur impellor, hoc est radicem biquadraticam quadrati illius, quod ex quantitate negativa oritur, non esse realem. Istud quoque acerrimo judicio vestro subjicio, atque committo. Valete.

Patavii XIII. Kal. Januarii 1747.